

XLVIII MIĘDZYSZKOLNY TURNIEJ FIZYCZNY
dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych
w roku szkolnym 2005/06

WZORCOWE ROZWIĄZANIE ZADANIA NR 3

Wyrażenie $\Delta E_p = -\frac{GMm}{r+h} + \frac{GMm}{r}$ jest ogólniejsze bowiem nie zakłada, że natężenie pola grawitacyjnego E , czyli po prostu przyspieszenie ziemskie g jest prawie stałe. Zauważmy, że możemy to wyrażenie na energię potencjalną przepisać jako

$$\begin{aligned}\Delta E_p &= -\frac{GMm}{r+h} + \frac{GMm}{r} = m \frac{GM}{[r+h]^2} [r+h] - m \frac{GM}{r^2} r = mE(r+h)[r+h] - mE(r)r \\ &= mg(r+h)[r+h] - mg(r)r ,\end{aligned}$$

przy czym $E(r+h), g(r+h), E(r), g(r)$ oznaczają funkcje $r+h$ i r . Z powyższego łatwo można zauważyć, że jeśli przyjmiemy, że przyspieszenie ziemskie zmienia się niewiele, tzn. że $g(r+h) \approx g(r) \approx \text{const.}$, to otrzymamy wyrażenie $\Delta E_p = mgh$, a zatem wyrażenie o mniejszym stopniu ogólności.

Zwykle formalny dowód przejścia jednego wyrażenia w drugie przedstawia się przez rozwinięcie w szereg Taylora, czyli przez zastosowanie matematyki wyższej. Przytoczmy go dla pełności obrazu. Zauważmy, że odległość między dwoma poziomami odniesienia $h = (r+h) - r$ przy czym zakładamy $h \ll r$ (h dużo mniejsze od r). Piszemy kolejno:

$$\begin{aligned}\Delta E_p &= E_p(r+h) - E_p(r) = -\frac{GMm}{r+h} + \frac{GMm}{r} \approx -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{r^2}h + \dots + \frac{GMm}{r} \\ &\approx mE(r)h = mgh ,\end{aligned}$$

gdzie kropki oznaczają mniejsze człony oraz zakładamy, że $E(r) = g \approx \text{const.}$ aby uzyskać ostatnią równość.

Analogicznymi wyrażeniami w polu elektrostatycznym byłyby $\Delta E_p = \frac{kQq}{r+h} - \frac{kQq}{r}$, gdzie k - stała elektryczna, Q - ładunek wytwarzający pole, q - ładunek próbny, $r, r+h$ - odległość środków tych ładunków oraz $\Delta E_p = qEh$, gdzie $E(r+h) = \frac{kQ}{(r+h)^2} \approx E(r) = \frac{kQ}{r^2} \approx \text{const.}$ jest natężeniem pola elektrycznego, a h wysokością nad pewnym poziomem odniesienia r .

Proponowana punktacja:

1. Prawidłowa odpowiedź na pytanie, które wyrażenie dla pola grawitacyjnego jest ogólniejsze. - max. 2 pkt.
2. Prawidłowa dyskusja wzajemnej relacji między oboma wyrażeniami (może być ilościowa) - max. 4 pkt.
3. Pozytywna odpowiedź i podanie analogicznych wyrażeń dla pola elektrostatycznego - max. 4 pkt.