

XLIX MIĘDZYSZKOLNY TURNIEJ FIZYCZNY
dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych
w roku szkolnym 2006/07

WZORCOWE ROZWIĄZANIE ZADANIA NR 1

Kamień będzie się poruszał po powierzchni półkuli dotąd, dopóki siła ciężaru w kierunku promienia nie zostanie zrównoważona przez siłę odśrodkową. Wówczas kamień opuści powierzchnię półkuli. Dla punktu, w którym to nastąpi można napisać zależność:

$$mg \cos \varphi = m \frac{v^2}{R}$$

$$v^2 = gR \cos \varphi, \quad (1)$$

$$\cos \varphi = \frac{R-h}{R} \Rightarrow h = R(1 - \cos \varphi), \quad (2)$$

gdzie h jest odległością, o jaką obniży się kamień w kierunku pionowym. Skorzystamy z zasady zachowania energii mechanicznej.

$mgR + \frac{mv_0^2}{2}$ - energia mechaniczna kamienia w najwyższym punkcie półkuli,
 $mg(R-h) + \frac{mv^2}{2}$ - energia mechaniczna kamienia w punkcie, w którym opuści on powierzchnię półkuli

Zatem:

$$mgR + \frac{mv_0^2}{2} = mg(R-h) + \frac{mv^2}{2} \quad (3)$$

Wykorzystując zależność (2) w równaniu (3), otrzymujemy:

$$v_0^2 + 2gR = 3gR \cos \varphi$$

Położenie punktu, w którym kamień opuści powierzchnię półkuli wyrażamy za pomocą kąta φ :

$$\cos \varphi = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}, \quad \varphi = \arccos \left(\frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR} \right)$$

Warunek opuszczenia półkuli przez kamień w najwyższym położeniu:

$$\frac{mv_0^2}{R} \geq mg \quad (4)$$

tutaj $\varphi = 0$, co daje $1 = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gr} \Rightarrow$ czyli $v_0 \geq \sqrt{gR}$

Proponowana punktacja:

1. Poprawne sformułowanie warunków położenia kamienia w punkcie jego oderwania od powierzchni półkuli – max 3 pkt.
2. Prawidłowe wykorzystanie zasady zachowania energii mechanicznej – max 3 pkt.
3. Poprawne wyznaczenie kąta φ - max 2 pkt.
4. Prawidłowe wyznaczenie prędkości v_0 , przy której kamień od razu opuści powierzchnię półkuli – max 2 pkt.