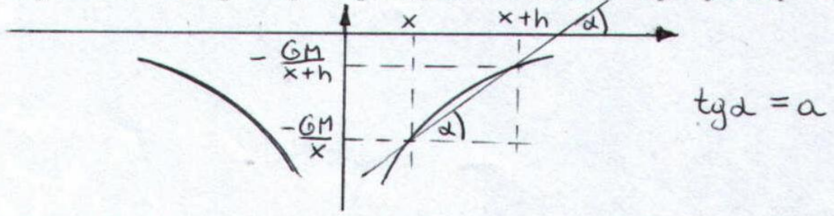
Zadanie 2 – rozwiązanie:

Wyprowadźmy najpierw wzór na współczynnik kierunkowy a. W tym celu poprowadźmy sieczną przechodzącą przez wspomniane dwa punkty. Odpowiednie wartości funkcji wynoszą $-GM/x$ oraz $-GM/(x+h)$.



Z rysunku widać, że współczynnik kierunkowy siecznej (tangens odpowiedniego kąta) wynosi

$$a = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-\frac{GM}{x+h} + \frac{GM}{x}}{h} = \frac{GM}{(x+h)x} \tag{4}$$

Przechodząc z h do zera otrzymujemy potrzebny wzór. Jeżeli znasz pojęcie pochodnej to wiesz, że współczynnik kierunkowy stycznej do krzywej w punkcie x otrzymasz różniczkując funkcję po zmiennej x.

Rozważmy teraz kulkę poruszającą się w leju po okręgu o promieniu r. Jeżeli pominiemy tarcie, to podczas stacjonarnego ruchu wypadkowa siły grawitacji i odśrodkowej jest prostopadła do powierzchni leja. Z analizy trójkątów podobnych wynika, że stosunek siły odśrodkowej działającej na kulkę do siły grawitacji jest równy wyliczonemu wcześniej współczynnikowi kierunkowemu stycznej

$$\frac{mv^2/r}{mg} = \frac{GM}{r^2} \tag{5}$$

Po podstawieniu $v = 2\pi r/T$ otrzymujemy szukaną zależność.

Analogiczą zależność można łatwo otrzymać rozważając ruch ciała w polu siły grawitacji $F = GMm/r^2$ przyrównując ją do siły odśrodkowej $F = mv^2/r$. Otrzymana zależność nosi nazwę III prawa Keplera. Rozważany grawitacyjny lej jest zatem modelem zagadnienia dwóch ciał przyciągających się siłą odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości.

Proponowana punktacja:

1. Wyprowadzenie wzoru na współczynnik kierunkowy stycznej lub skorzystanie z interpretacji geometrycznej pochodnej - 3 punkty
2. Uzyskanie wzoru (5) - 2 punkty
3. Uzyskanie wzoru (2) - 1 punkt
4. Wyprowadzenie III prawa Keplera z przyrównania siły grawitacji do siły odśrodkowej - 2
5. Skomentowanie uzyskanego wyniku - 2 punkty