WZORCOWE ROZWIĄZANIE ZADANIA 3:

Zapiszemy równania dla sprężystego zderzenia cząstki zwykłej oraz fantomu uwzględniając fakt, że fantom ma ujemną energię kinetyczną i pęd tzn.

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}m_f v_{f1}^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}m_f v_{f2}^2, \qquad (1)$$

$$mv_1 - m_f v_{f1} = mv_2 - m_f v_{f2,} \qquad (2)$$

gdzie m - masa zwykłej cząstki, m_f- masa fantomu, v_1 - prędkość zwykłej cząstki przed zderzeniem, v_2 – prędkość zwykłej cząstki po zderzeniu, v_{f1}- prędkość fantomu przed zderzeniem, v_{f2}- prędkość fantomu po zderzeniu. Podobnie jak w przypadku zderzeń zwykłych cząstek powyższe równania można przepisać do postaci:

$$m(v_1 - v_2)(v_1 + v_2) = m_f\left(v_{f1} - v_{f2}\right)(v_{f1} + v_{f2}), \qquad (3)$$

$$m(v_1 - v_2) = m_f\left(v_{f1} - v_{f2}\right). \qquad (4)$$

Korzystając z (4) równanie (3) daje

$$v_{f2} = v_1 + v_2 - v_{f1}, \qquad (5)$$

co dalej po podstawieniu do (4) pozwala napisać

$$m(v_1 - v_2) = m_f(2v_{f1} - v_1 - v_2), \qquad (6)$$

i po dalszych przekształceniach otrzymujemy

$$v_2 = \frac{2m_f}{m_f - m}v_{f1} - \frac{m_f + m}{m_f - m}v_1. \qquad (7)$$

Podstawiając (7) do (5) otrzymujemy

$$v_{f2} = \frac{m_f + m}{m_f - m}v_{f1} - \frac{2m}{m_f - m}v_1. \qquad (8)$$

W odróżnieniu od standardowych równań zderzeń zwykłych cząstek formuły (7) i (8) nie mają zastosowania dla przypadku zderzenia cząstki zwykłej i fantomu o równych masach $m_f = m$, chyba że obie cząstki na początku spoczywają $v_1 = v_{f1} = 0$. Sytuację tę rozważymy oddzielnie. Zanim to jednak zrobimy, to spróbujemy jeszcze przedyskutować zachowanie cząstek zderzających się, gdy jedna z nich ma masę dużo większą niż druga. Na przykład jeśli fantom ma masę zaniedbywalnie małą $m_f \ll m$ $\left(m_f \approx 0\right)$, to

$$v_2 = v_1 \text{ oraz } v_{f2} = 2v_1 - v_{f1}, \qquad (9)$$

natomiast jeśli zwykła cząstka ma zaniedbywalnie małą masę $m \ll m_f (m \approx 0)$, to

$$v_{f2} = v_{f1} \text{ oraz } v_2 = 2v_{f1} - v_1. \qquad (10)$$

Oznacza to, że cząstka cięższa porusza się bez zmiany prędkości, natomiast cząstka lżejsza porusza się z prędkością przeciwną do początkowej zwiększoną o podwójną prędkość cząstki cięższej.

Rozważmy sytuację, w której zwykła cząstka początkowo spoczywa tzn. $v_1 = 0$ (rozpraszanie fantomu na zwykłej cząstce). Wówczas z równania (1) otrzymujemy, że

$$\frac{1}{2}m_f\left(v_{f2}^2 - v_{f1}^2\right) = \frac{1}{2}mv_2^2 \qquad (11)$$

a zatem musi zachodzić, że

$$v_{f2}^2 > v_{f1}^2 \qquad (12)$$

co bezpośrednio daje

$$-\frac{1}{2}m_f v_{f2}^2 < -\frac{1}{2}m_f v_{f1}^2, \qquad (13)$$

czyli, że (ujemna) energia kinetyczna fantomu po zderzeniu jest mniejsza od (ujemnej) energii kinetycznej przed zderzeniem. Zatem zwykła cząstka czerpie energię z fantomu. Druga sytuacja powstaje, gdy fantom początkowo spoczywa tzn. $v_{f1} = 0$. Wówczas z równania (1) mamy, że

$$\frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2) = -\frac{1}{2}m_f v_{f2}^2 < 0, \qquad (14)$$

co przy dopuszczalnej ujemnej energii kinetycznej fantomu prowadzi do wymagania, że $v_2^2 > v_1^2$ a zatem zwykła cząstka padająca na (początkowo spoczywający) fantom o energii równej zeru pobiera od fantomu energię zwiększając ją i powodując, że cząstka ta porusza się szybciej a fantom „spada" do stanu o niższej (ujemnej) energii.
Podobnie jest w sytuacji ogólnej bowiem z równania (1) mamy

$$\frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2) = -\frac{1}{2}m_f(v_{f2}^2 - v_{f1}^2) \qquad (15)$$

i ponieważ $v_{f2}^2 > v_{f1}^2$ (czyli spełniony jest warunek (13)), to również $v_2^2 > v_1^2$ co oznacza, że fantom „spada" do stanu o niższej (ujemnej) energii kinetycznej a zderzająca się z nim zwykła cząstka zwiększa swoją prędkość a tym samym energię.
Na zakończenie rozważmy przypadek, w którym masy cząstek są równe $m = m_f$. Zastosujemy równania (1) i (2) przy spoczywającej początkowo cząstce zwykłej tzn.

$$-\frac{1}{2}mv_{f1}^2 = -\frac{1}{2}mv_{f2}^2 + \frac{1}{2}mv_2^2, \qquad (16a)$$
$$-mv_{f1} = -mv_{f2} + mv_2, \qquad (16b)$$

co po przekształceniach daje

$$v_2^2 = \left(v_{f2} - v_{f1}\right)(v_{f2} + v_{f1}), \qquad (17a)$$
$$v_2 = v_{f2} - v_{f1}, \qquad (17b)$$

czyli

$$v_2 = v_{f2} + v_{f1}, \qquad (18a)$$

$$v_2 = v_{f2} - v_{f1}. \qquad (18b)$$

Z równań (18a-b) widać, że aby były one niesprzeczne to musi zachodzić

$$v_2 = v_{f2} \text{ i } v_{f1} = 0. \qquad (19)$$

Interpretując to fizycznie mamy do czynienia ze swoistą kreacją pary zwykła cząstka + fantom o przeciwnych kierunkach pędu oraz przeciwnych wartościach energii dającej w sumie zero. Jest to zupełnie logiczne bowiem od początku założyliśmy zasadę zachowania energii i pędu w rozważanym zdarzeniu.
Dokładnie ten sam wynik otrzymamy zakładając, że początkowo spoczywa fantom tzn.

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_{f2}^2, \qquad (20a)$$
$$mv_1 = mv_2 - mv_{f2}, \qquad (20b)$$

czyli

$$(v_1 - v_2)(v_1 + v_2) = -v_{f2}^2, \qquad (21a)$$
$$v_1 - v_2 = -v_{f2}, \qquad (21b)$$

a zatem

$$v_1 + v_2 = v_{f2}, \qquad (22a)$$
$$v_1 - v_2 = -v_{f2}, \qquad (22b)$$

co może być spełnione tylko, gdy

$$v_1 = 0 \text{ oraz } v_2 = v_{f2}. \qquad (23)$$

Materia złożona z fantomów (tzw. materia fantomowa) jest jednym z kandydatów do wyjaśnienia fenomenu ciemnej energii odpowiadającej za przyspieszoną ekspansję Wszechświata.

Punktacja:

- Wyprowadzenie formuł (7) i (8) – 4p
- Wykazanie, że ze względu na swoją ujemną energię kinetyczną fantom może oddawać energię zwykłej cząstce prowadząc do wzrostu jej prędkości a tym samym energii – 2p
- Rozważenie przypadku, w którym cząstki (zwykła i fantom) mają identyczne masy – 2p
- Zinterpretowanie przypadku oddziaływania cząstek (zwykłej i fantomu) o identycznych masach jako kreacji pary zwykła cząstka + fantom - 2p