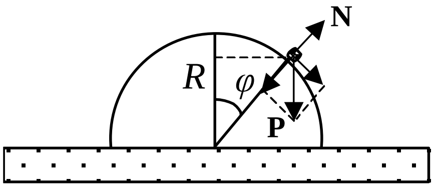
WZORCOWE ROZWIĄZANIE ZADANIA 1



Na ciało znajdujące się na powierzchni półkuli działają siły: ciężkości $\mathbf{P}$ i reakcji półkuli $\mathbf{N}$. Równanie ruchu (II zasada dynamiki Newtona) ma więc postać:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{P} + \mathbf{N}. \text{ 1p} \tag{1}$$

Warunki początkowe sprawiają, że przez pewien czas ciało porusza się po łuku okręgu o promieniu R. Siła dośrodkowa jest wypadkową składowej radialnej siły ciężkości i siły reakcji powierzchni półkuli

$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos\varphi - N. \text{ 1p} \tag{2}$$

W pewnym miejscu określonym przez kąt φ_0 ciało odrywa się od półkuli, a więc siła reakcji $N = 0$. Z równania (2) otrzymujemy:

$$\frac{mv_1^2}{R} = mg\cos\varphi_0. \text{ 1p} \tag{3}$$

Siła reakcji jest prostopadła do toru ciała i nie wykonuje pracy. Jeżeli uwzględnimy ten fakt i pominiemy tarcie, to spełniona będzie zasada zachowania energii mechanicznej, czyli

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgR = \frac{mv_1^2}{2} + mgR\cos\varphi_0. \text{ 1p} \tag{4}$$

Z równań (3) i (4) otrzymujemy odpowiedź na zagadnienie a):

$$\cos\varphi_0 = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gR}, \text{ 1p} \tag{5}$$

i odpowiedź na zagadnienie b):

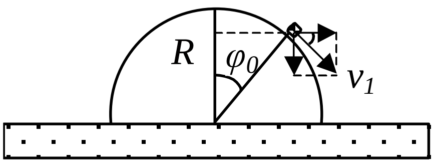
$$v_1 = \sqrt{\frac{v_0^2 + 2gR}{3}}. \text{ 1p} \tag{6}$$

W celu obliczenia wartości prędkości w chwili upadku ciała na podstawę korzystamy również z zasady zachowania energii mechanicznej, która prowadzi do równania:

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgR = \frac{mv_2^2}{2}.\ 1\text{p} \tag{7}$$

Stąd otrzymujemy (zagadnienie c)

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2gR}.\ 1\text{p} \tag{8}$$



W celu obliczenia czasu lotu ciała od chwili opuszczania półkuli do chwili upadku na podstawę, rozkładamy ruch na składową poziomą i pionową. W kierunku poziomym nie działają żadne siły, a więc mamy ruch jednostajny z prędkością $v_1 \cos\varphi_0$. W kierunku pionowym działa siła ciężkości, czyli ciało porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym z prędkością początkową $v_1 \sin\varphi_0$. Drogę w tym ruchu wyrażamy wzorem:

$$R\cos\varphi_0 = tv_1 \sin\varphi_0 + \frac{gt^2}{2}.\ 1\text{p} \tag{9}$$

Równanie kwadratowe (9) ma rozwiązanie ujemne, które odrzucamy i rozwiązanie dodatnie

$$t = \frac{\sqrt{v_1^2 \sin^2\varphi_0 + 2gR\cos\varphi_0} - v_1 \sin\varphi_0}{g},\ 1\text{p} \tag{10}$$

które daje odpowiedź na zagadnienie d).