

WZORCOWE ROZWIĄZANIE ZADANIA 3:

1. Wyprowadzenie równania ruchu przedmiotów poruszających się w tunelu:

$$F = -\left(G\rho\frac{4\pi}{3}\right)r = -kr,$$

G – stała grawitacji, ρ - gęstość planety, r – promień planety - 2 pkt.

2. Zauważenie, że ruch ten jest ruchem harmonicznym – 1 pkt
3. Wyznaczenie energii ruchu:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \text{const.}$$

Wyprowadzenie wyrażenia na energię maksymalną ruchu, która jest stała i równa całkowitej energii ruchu w każdym momencie:

$$E_{max} = \frac{1}{2}kA^2 = G\rho\frac{2\pi m}{3}r^2,$$

lub wyrażenia równoważnego, gdzie A – amplituda ruchu, m - masa przedmiotu - 2 pkt.

4. Podanie odpowiedzi na pytanie 1. (promień - jedyna wielkość w równaniu na energię, która jest w kwadracie) z uzasadnieniem – 1 pkt
5. Podanie odpowiedzi na pytanie 2. (czas w jakim paczka przedostaje się z powierzchni planety na drugi koniec i z powrotem nie zależy od promienia planety, okres obiegu w ruchu harmonicznym wyraża się zależnością:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} - 2 \text{ pkt.}$$

6. Podanie odpowiedzi na pytanie 3., podstawienie wartości liczbowych i wyznaczenie maksymalnej dopuszczalnej masy przedmiotów

$$m_{max} = \frac{3}{2}\frac{E_{max}}{\pi G\rho r^2}, m \approx 17 - 2 \text{ pkt.}$$