

WZORCOWE ROZWIĄZANIE ZADANIA 1.

W rozważanym układzie moc wydzielana na drucie oporowym będzie równa

$$P = I^2 R \quad (1)$$

gdzie I jest natężeniem prądu płynącego w obwodzie. Oznaczając przez R rezystancję drutu oporowego możemy wyrazić natężenie prądu I jako funkcję tej rezystancji z prawa Ohma dla całego obwodu:

$$I = \frac{E}{R + R_0} \quad (2)$$

Wstawiając (2) do (1) i uzależniając R od długości drutu ($R = \alpha l$) możemy (1) napisać w postaci:

$$P(l) = \frac{E^2 \cdot \alpha l}{(\alpha l + R_0)^2} \quad (3)$$

Warunki zadania, określają jednak ograniczenie na moc rozpraszaną na jednostkę długości. Oznaczając tę wielkość jako Q możemy napisać:

$$Q(l) = \frac{P(l)}{l} = \frac{\alpha \cdot \varepsilon^2}{(\alpha l + R_0)^2} \quad (4)$$

Łatwo zauważyć, że $Q(l)$ jest dla dodatnich l malejącą funkcją długości, zatem maksimum przyjmuje dla $l \rightarrow 0$, skąd wnioskujemy, że:

$$Q_{\max} = Q(0) = \frac{\alpha \cdot \varepsilon^2}{R_0^2} = 81 \frac{W}{m} > 25 \frac{W}{m} \quad (5)$$

co jest odpowiedzią na pierwsze pytanie.

Określenie zakresu prądów dostępnych dla regulacji dla drutu o parametrach $\alpha = 16 \Omega/m$ i $\beta = 25 W/m$ wymaga spostrzeżenia, że natężenie prądu I jest monotoniczną i malejącą funkcją R

$$I(R) = \frac{E}{R_0 + R} \quad (6)$$

zatem minimalne natężenie prądu przypada dla nieskończonej długości drutu, a co za tym idzie jego rezystancji i wynosi:

$$I_{\min} = I(R \rightarrow \infty) = 0 \quad (7)$$

Znalezienie maksymalnej wartości prądu wymaga wyznaczenia minimalnej długości l_{\min} (rezystancji R_{\min}) drutu oporowego, dla której nie następuje jeszcze jego przepalenie. Wymaga to rozwiązania równania:

$$Q(l_{\min}) = \beta \quad (8)$$

co jest równoznaczne z (patrz wzór (4)):

$$\frac{\alpha \cdot \varepsilon^2}{(R_{\min} + R_0)^2} = \beta \quad (9)$$

Rozwiązując (9) ze względu na R_{\min} dostajemy

$$R_{\min} = E \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} - R_0 \quad (10)$$

a po podstawieniu do (6) otrzymujemy

$$I_{\max} = I(R_{\min}) = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = 1,25 A \quad (11)$$

dla długości drutu 20 cm i jego oporze 3,2 Ω . Natężenie prądu można zatem regulować od wartości bliskich zeru dla bardzo długiego drutu do 1,25 A.